Domácí úkol ze cvičení 6:

1. **Dokažte tvrzení:**
   Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající (resp. nerostoucí) a vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ má limitu a, ($a \in R$ nebo $a = \infty$ (resp. $a = -\infty$), pak také $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

   Odtud snadno např.: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$.

2. **Limita rekurentně zadané posloupnosti (užití věty o limitě monotónní posloupnosti):**

   (i) $a_1 = A\ ,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)\ ,\ A > 0\ ,\ n = 1,2, \dots\ ;$

   (ii) $a_1 = \sqrt{2}\ ,\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\ ,\quad n = 1,2, \dots\ ;$

   (iii) (trošku těžší) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}\ ,\ n = 1,2, \dots\ .$

   Rozhodněte (aspoň u jedné z daných posloupností), zda existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, a pokud ano, spočítejte ji.
   (!! Je třeba ukázat, že daná posloupnost konverguje – ukažte si na „výpočtu“ limity rekurentně dané posloupnosti $a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = (-1)a_n$, jak to dopadne, pokud budete jen „počítat“ s tím, že posloupnost limitu má.)

3. **Konvergence řad s nezápornými členy:**

   (i) Pokuste se sečíst řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ (Rada: rozložte zlomek $\frac{1}{4n^2-1}$ na rozdíl dvou zlomků).

   (ii) Ukažte, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$ víte-li, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ pro lib. $a \in R$
   (konvergenci snadno dokážeme i my na příštím cvičení);

   (iii) Ukažte (užitím nutné podmínky konvergence řad), že divergují řady:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\ ;$$

   (iv) Rozhodněte o konvergenci , resp. divergenci řad (užijte srovnávací kriterium) :

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}\ ;\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n\sqrt{n}}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\ .$$